

# Champs magnétiques

## Force magnétique sur une charge en mouvement

Les champs magnétiques sont définis par la force qu'ils exercent sur des charges en mouvement.

Cette force magnétique  $\vec{F}_m$  est un vecteur dont la norme est proportionnelle à:

1. La valeur  $Q$  de la charge
2. La vitesse  $v$  de la charge
3. La densité de flux magnétique  $B$
4. Le sinus de l'angle entre le vecteur vitesse  $\vec{v}$  et le vecteur densité de flux magnétique  $\vec{B}$

Ces quatre conditions sont résumées par l'équation suivante :

$$|\vec{F}_m| = |Q| |\vec{v}| |\vec{B}| \sin(\phi) \quad (1)$$

L'équation (1) nous permet de calculer la magnitude de la force mais elle ne nous donne aucune information sur sa direction.

L'équation qui nous permet de trouver le vecteur  $\vec{F}_m$  est donnée ci-dessous.

$$\vec{F}_m = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2)$$

Dans (2), le symbole  $\times$  représente le produit vectoriel.

Selon (2), la force magnétique sur une charge est toujours perpendiculaire à la vitesse de la charge.

## Le produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs est une opération qui donne comme résultat un troisième vecteur. Dans cette section, nous allons voir comment le calculer. Notez qu'il y a plusieurs façon de faire ce calcul. Si vous êtes à l'aise avec une méthode différente de ce qui est présentée ici, vous pouvez l'utiliser.

Supposons que nous avons deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  comme illustré à la figure 1 ci-dessous.

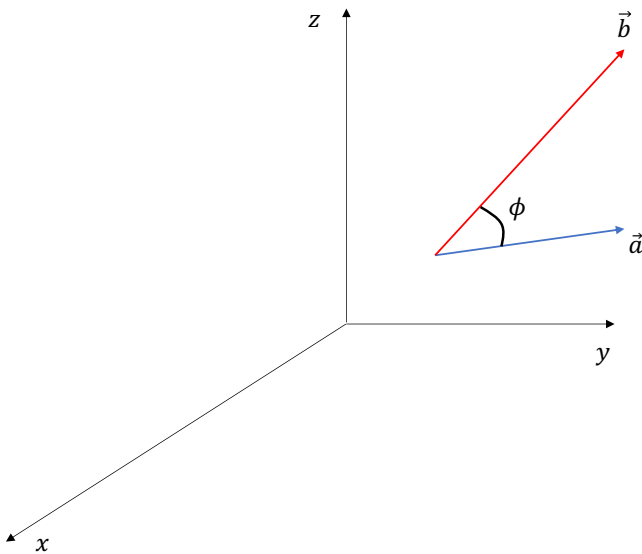


FIGURE 1. DEUX VECTEURS DANS UN SYSTÈME CARTÉSIEN DE COORDONNÉES.

### Direction du produit vectoriel

Le produit vectoriel  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  est perpendiculaire à  $\vec{a}$  et à  $\vec{b}$ , et sa direction est donnée par la règle de la main droite illustrée à la figure 2.

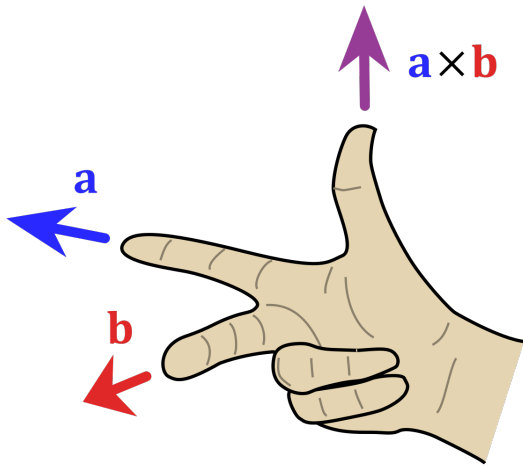


FIGURE 2. RÈGLE DE LA MAIN DROITE: L'INDEX POINT DANS LA DIRECTION DU PREMIER VECTEUR, LE MAJEUR DANS LA DIRECTION DU DEUXIÈME VECTEUR ET LE POUCE MONTRE LA DIRECTION DU PRODUIT VECTORIEL.

Pour appliquer la règle de la main droite, on point l'index dans la direction du premier vecteur du produit, le majeur dans la direction du deuxième vecteur du produit, et le pouce donne la direction du produit vectoriel. Le résultat du produit  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  est montré à la figure 3.

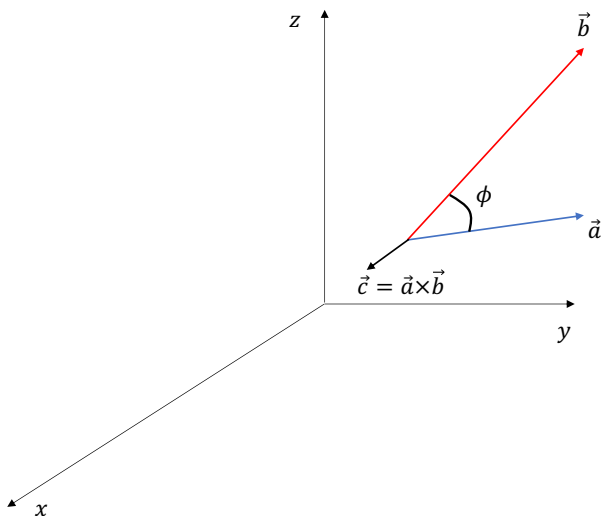


FIGURE 3. PRODUIT VECTORIEL DE DEUX VECTEURS.

### Norme du produit vectoriel

La norme du vecteur résultant d'un produit vectoriel est égale à la multiplication des normes de chacun des deux vecteurs fois le sinus de l'angle entre les vecteurs.

Dans le cas illustré à la figure 3, la norme est égale au produit de la norme de  $\vec{a}$  fois la norme de  $\vec{b}$  fois le sinus de  $\phi$  :

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\phi) \quad (3)$$

Produit vectoriel entre vecteurs unitaires

Avec les règles décrites précédemment pour la direction et la norme du produit vectoriel, nous pouvons écrire le résultat du produit vectoriel entre vecteurs unitaires.

Considérons d'abord le produit vectoriel entre les vecteurs unitaires  $\vec{a}_x$  et  $\vec{a}_y$ .

La norme du produit peut être trouvée en appliquant l'équation (3) :

$$|\vec{a}_x \times \vec{a}_y| = |\vec{a}_x| |\vec{a}_y| \sin(\phi_{xy}) \quad (4)$$

Les vecteurs unitaires ont entre eux un angle de  $90^\circ$ . De plus, puisque ces vecteurs sont unitaires, ils ont par définition une norme égale à 1. Nous pouvons donc conclure que la norme du produit scalaire entre ces deux vecteurs unitaires (et entre n'importe lesquels des vecteurs unitaires  $\vec{a}_x$ ,  $\vec{a}_y$  et  $\vec{a}_z$ ) est égale à un. C'est à dire que le résultat est également un vecteur unitaire :

$$|\vec{a}_x \times \vec{a}_y| = |\vec{a}_x| |\vec{a}_y| \sin(90^\circ) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \quad (5)$$

La direction du produit vectoriel entre les vecteurs unitaires est donnée par la règle de la main droite. Nous pouvons voir à la figure 4 ci-dessous que le résultat est

$$\vec{a}_x \times \vec{a}_y = \vec{a}_z$$

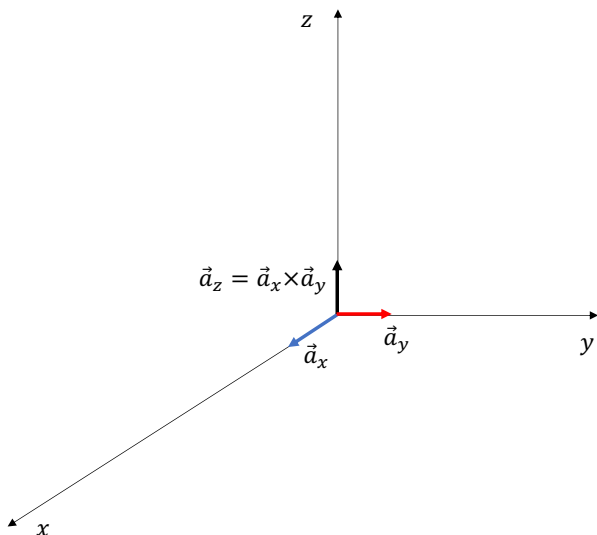


FIGURE 4. PRODUIT VECTORIEL ENTRE DEUX VECTEURS UNITAIRES.

Nous pouvons répéter ces raisonnements pour trouver le produit vectoriel entre toutes les paires de vecteurs unitaires orthogonaux dans le système Cartésien. Complétez utilisant la règle de la main droite la liste suivante :

$$\vec{a}_x \times \vec{a}_y = \vec{a}_z$$

$$\vec{a}_x \times \vec{a}_z = -\vec{a}_y$$

$$\vec{a}_y \times \vec{a}_x =$$

$$\vec{a}_y \times \vec{a}_z =$$

$$\vec{a}_z \times \vec{a}_x =$$

$$\vec{a}_z \times \vec{a}_y =$$

$$\vec{a}_x \times \vec{a}_x =$$

$$\vec{a}_y \times \vec{a}_y =$$

$$\vec{a}_z \times \vec{a}_z =$$

Deux manières de calculer le produit vectoriel entre deux vecteurs généraux dans la système Cartésien de coordonnées

Considérez les vecteurs  $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$  et  $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ . Leur produit vectoriel peut être calculé de deux façons différentes (il y a aussi d'autres techniques comme mentionné précédemment).

La première technique que nous allons utiliser ici se base sur la propriété distributive du produit vectoriel.

1. Nous écrivons les vecteurs en termes des vecteurs unitaires orthogonaux  $\vec{a}_x$ ,  $\vec{a}_y$  et  $\vec{a}_z$  :

$$\vec{A} = x_1 \vec{a}_x + y_1 \vec{a}_y + z_1 \vec{a}_z$$

$$\vec{B} = x_2 \vec{a}_x + y_2 \vec{a}_y + z_2 \vec{a}_z$$

2. Nous multiplions les deux vecteurs ainsi écrits et nous utilisons la propriété distributive, multipliant le premier terme du premier vecteur par le premier terme du

deuxième vecteur, puis le premier terme du premier vecteur par le deuxième terme du deuxième vecteur et ainsi de suite :

$$\begin{aligned}
 & (x_1 \vec{a}_x + y_1 \vec{a}_y + z_1 \vec{a}_z) \times (x_2 \vec{a}_x + y_2 \vec{a}_y + z_2 \vec{a}_z) = \\
 & x_1 x_2 \vec{a}_x \times \vec{a}_x + x_1 y_2 \vec{a}_x \times \vec{a}_y + x_1 z_2 \vec{a}_x \times \vec{a}_z \\
 & + y_1 x_2 \vec{a}_y \times \vec{a}_x + y_1 y_2 \vec{a}_y \times \vec{a}_y + y_1 z_2 \vec{a}_y \times \vec{a}_z \\
 & + z_1 x_2 \vec{a}_z \times \vec{a}_x + z_1 y_2 \vec{a}_z \times \vec{a}_y + z_1 z_2 \vec{a}_z \times \vec{a}_z
 \end{aligned}$$

Utilisant la liste que vous avez remplie comme exercice auparavant, nous pouvons écrire le résultat suivant :

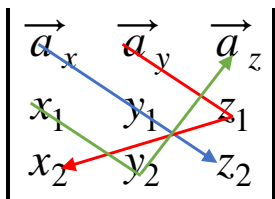
$$\begin{aligned}
 \vec{A} \times \vec{B} = & \\
 & x_1 y_2 \vec{a}_z - x_1 z_2 \vec{a}_y \\
 & - y_1 x_2 \vec{a}_z + y_1 z_2 \vec{a}_x \\
 & + z_1 x_2 \vec{a}_y - z_1 y_2 \vec{a}_x
 \end{aligned}$$

La deuxième technique utilise une notation matricielle. Le produit vectoriel est le déterminant d'une matrice comme suit :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant peut être calculé comme illustré graphiquement dans les images ci-dessous.

1. D'abord, multipliez les éléments comme indiqué par les flèches de chaque couleur et additionnez les résultats :

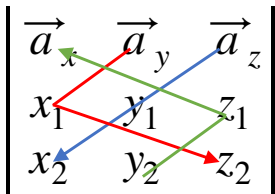


$$\begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Le résultat partiel est

$$y_1 z_2 \vec{a}_x + x_1 y_2 \vec{a}_z + z_1 x_2 \vec{a}_y$$

2. Multipliez ensuite les éléments selon les flèches en couleur et additionnez les résultats avec signe négatif :



$$\begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$-y_1 x_2 \vec{a}_z - x_1 z_2 \vec{a}_y - z_1 y_2 \vec{a}_x$$

3. Additionnez les deux résultats partiels :

$$\vec{A} \times \vec{B} = y_1 z_2 \vec{a}_x + x_1 y_2 \vec{a}_z + z_1 x_2 \vec{a}_y - y_1 x_2 \vec{a}_z - x_1 z_2 \vec{a}_y - z_1 y_2 \vec{a}_x$$

## Unités

Réécrivons l'équation (1) ci-dessous avec les unités de chacun des facteurs :

$$|\vec{F}_m| [\text{en Newtons}] = |Q| [\text{en Coulombs}] |\vec{v}| [\text{en m/s}] |\vec{B}| [\text{en unités encore inconnues}] \sin(\phi) [\text{pas d'unités}] \quad (3)$$

De l'équation (3), nous pouvons voir que les unités de la densité de flux magnétique  $\vec{B}$  sont

$$\frac{Ns}{Cm} = \text{Tesla} \quad (4)$$

## Movement circulaire de charges dans un champ magnétique uniforme

Si une charge qui se déplace à une vitesse constante entre dans une zone où il y a un champ magnétique uniforme, elle subit une force magnétique constante perpendiculaire en tout moment à sa vitesse de déplacement et elle décrit donc un cercle.

Cet effet est utilisé dans les accélérateurs de particules, les détecteurs de particules radioactives et les écrans à rayons cathodiques.

L'effet est illustré à la figure 5.

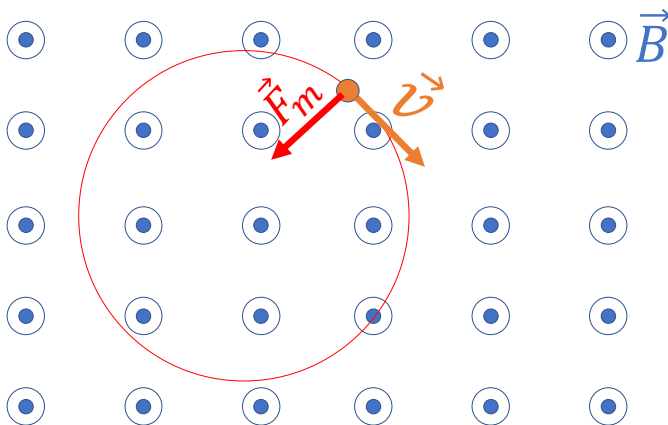


FIGURE 5. CHARGE (EN ORANGE) QUI SE DÉPLACE AVEC UNE VITESSE CONSTANTE  $\vec{v}$  DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME  $\vec{B}$ . LA FORCE MAGNÉTIQUE  $\vec{F}_m$  EST CONSTANTE ET PERPENDICULAIRE À LA VITESSE EN TOUT MOMENT.

Connaissant la charge, la vitesse et la densité de flux magnétique, nous pouvons calculer la norme de la force magnétique en utilisant l'équation (1) :



$$|\vec{F}_m| = |Q||\vec{v}||\vec{B}| \quad (5)$$

où nous avons utilisé le fait que l'angle entre les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{B}$  est  $90^\circ$  et le sinus est donc égale à 1.

La norme de la force centripète  $\vec{F}_c$  pour un mouvement circulaire uniforme est donnée par :

$$|\vec{F}_c| = m \frac{|\vec{v}|^2}{r} \quad (6)$$

Dans (6),  $r$  est le rayon du cercle décrit par la charge.

Puisque les deux forces doivent être identiques, si nous égalisons (5) et (6), nous obtenons

$$|Q||\vec{v}||\vec{B}| = m \frac{|\vec{v}|^2}{r} \quad (7)$$

L'équation (7) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\frac{|Q||\vec{B}|}{|\vec{v}|} = \frac{m}{r} \quad (8)$$

## Courant électrique dans un conducteur

Nous avons déjà vu ce qu'un courant électrique lorsque nous avons étudié les champs électriques.

### Courant électrique

Un courant électrique est le déplacement de charges électriques à l'intérieur d'un matériau. Pour que les charges puissent se déplacer, elles ne peuvent pas être figées à l'intérieur du matériau. C'est typiquement (mais pas toujours) les charges négatives qui peuvent se déplacer. Le sens du courant est défini pour des raisons historiques par le sens des charges positives qui est souvent l'inverse du mouvement des charges négatives. Le sens du courant peut donc être opposé au sens réel du déplacement des charges.

## Force magnétique sur un câble portant un courant électrique

Nous avons vu que la force magnétique est donnée selon l'équation (2), répétée ici pour plus de commodité :

$$\vec{F}_m = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (9)$$

Utilisons maintenant le fait que la vitesse est égale au déplacement  $\vec{l}$  par unité de temps  $t$  :

$$\vec{v} = \frac{\vec{l}}{t} \quad (10)$$

Remplaçant (10) dans (9), nous obtenons

$$\vec{F}_m = Q\left(\frac{1}{t}\vec{l} \times \vec{B}\right) \quad (11)$$

Notant que le courant électrique  $i$  est égale à la charge  $Q$  par unité de temps  $t$ , nous pouvons réécrire (11) pour qu'elle soit en termes du courant  $i = \frac{Q}{t}$  :

$$\vec{F}_m = \frac{Q}{t}(\vec{l} \times \vec{B}) = i(\vec{l} \times \vec{B}) \quad (11)$$

L'équation (11) nous permet de calculer la force magnétique exercée sur un fil qui conduit un courant électrique lorsqu'il est immergé dans un champ magnétique.

Voyons un exemple. Dans la figure 6 ci-dessous, un fil portant un courant de 2 A est dans un champ magnétique de 3 T. Nous allons calculer la force exercée sur 2 m de ce fil conducteur d'électricité.

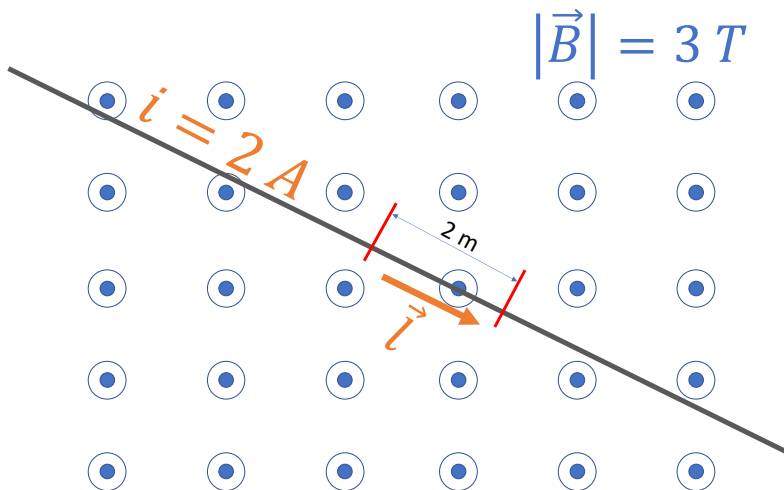


FIGURE 6. FIL AVEC COURANT DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE QUI SORT DE LA FEUILLE.

Utilisant (11), la force doit être égale à

$$\vec{F}_m = i(\vec{l} \times \vec{B}) \quad (12)$$

Selon cette équation, utilisant la règle de la main droite, la direction de la force est vers le bas, perpendiculaire au fil.

La norme de la force est

$$|\vec{F}_m| = i|\vec{l}||\vec{B}| = 2 \text{ A} \cdot 2 \text{ m} \cdot 3 \text{ T} = 12 \text{ N}$$

## Quelques mots sur la terminologie

Dans ce texte, nous nous sommes référés à  $\vec{B}$  de deux manières différentes : champ magnétique et densité de flux magnétique.

Formellement,  $\vec{B}$  devrait être appelé la densité de flux magnétique mais les deux termes sont utilisés dans la littérature.

On utilise  $\vec{H}$  pour représenter le champ magnétique. La relation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  dans le vide est seulement un facteur constant  $\mu_0$  appelée la perméabilité :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (13)$$

La valeur de la perméabilité du vide  $\mu_0$  est

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{V \cdot s}{A \cdot m} \quad (14)$$

## Le champ magnétique produit par un courant électrique dans un long fil

Les courants électriques produisent des champs magnétiques. Dans cette section, nous allons utiliser un résultat qui peut être déduit soit en se basant sur la loi de Biot et Savart, soit sur la loi d'Ampère, mais nous allons simplement donner le résultat.

Un long fil parcouru par un courant électrique comme celui de la figure 7 produit un champ magnétique orthoradial (c'est-à-dire qu'il est perpendiculaire à la direction radiale).

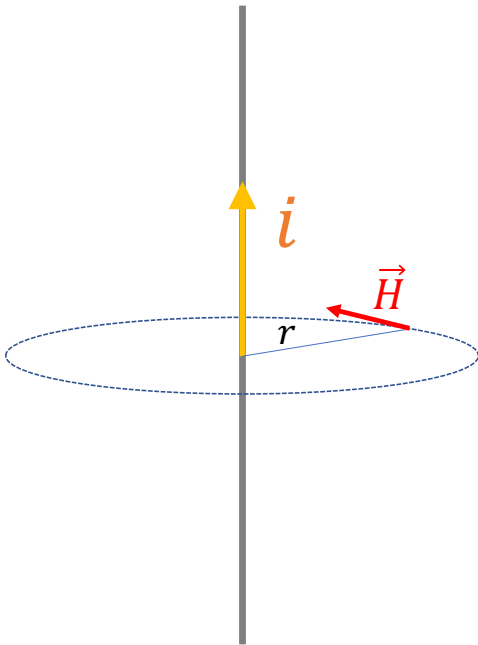


FIGURE 7. CHAMP MAGNÉTIQUE PRODUIT PAR UN COURANT ÉLECTRIQUE DANS UN LONG FIL.

La direction du champ magnétique est donnée par une autre règle de la main droite illustré à la figure 8.

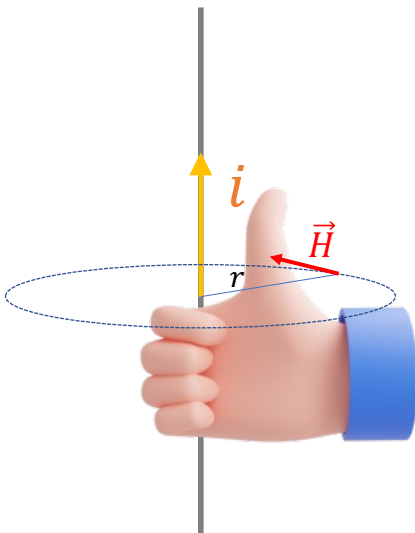


FIGURE 8. LA DIRECTION DU CHAMP MAGNÉTIQUE DÛ À UN FIL PARCOURU PAR UN COURANT. POINTEZ LE POUCE DANS LA DIRECTION DU COURANT ET LES AUTRE DOIGTS DE LA MAIN FERMÉE INDIQUERONT LA DIRECTION DU CHAMP MAGNÉTIQUE.

La direction du champ magnétique est donnée par les doigts fermés lorsque le pouce est pointé dans la direction du courant.

L'amplitude du champ est donnée par

$$|\vec{H}| = \frac{i}{2\pi r} \quad (15)$$

On peut aussi calculer la densité de flux magnétique en utilisant l'équation (13)

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (16)$$

## Les équations de Maxwell

Même si cela serait très intéressant et que les solutions émerveillent celles et ceux qui ont l'occasion de les découvrir, nous n'allons pas faire, par manque de temps et des outils nécessaires, des dérivations ni utiliser les équations de Maxwell pour résoudre des problèmes dans ce cours. Il est cependant important d'en connaître l'existence et quelques unes des prédictions qui s'y cachent.

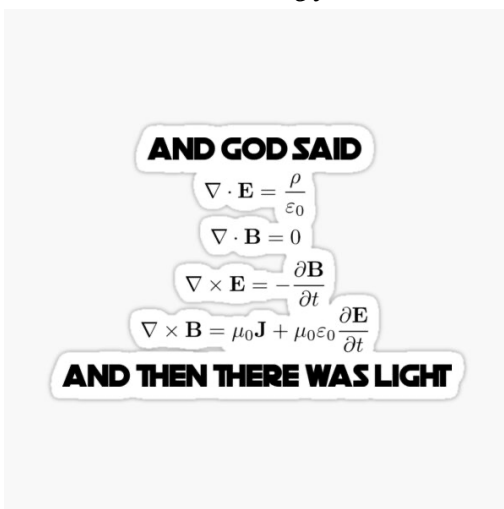
Voici les équations :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (18)$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \mu_0 \vec{H}}{\partial t} \quad (19)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \epsilon_0 \vec{E}}{\partial t} \quad (20)$$



Histoire courte des équations de Maxwell

Déjà au 18ème siècle, des expériences au laboratoire et des travaux théorique avaient été faits sur de nombreux aspects de l'électricité et le magnétisme. Coulomb a étudié les forces électrostatiques et il a formulé son équation dans les années 1780. La loi d'Ampère, qui montre quantitativement que les courants électriques produisent des champs magnétiques a été formulé en 1825. Le fait que les champs magnétiques qui varient dans le temps induisent des courants a été établi et quantifié par Michael Faraday en 1825. D'autres scientifiques ont aussi contribué au développement des équations qui régissent les phénomènes électromagnétiques. Telle est le cas de Lenz, qui a contribué à la résolution du problème de la direction de l'induction et de Neumann a découvert l'équation pour trouver la force induite par changement de flux magnétique. C'est Maxwell qui a mis de l'ordre dans tous ces résultats dans un ensemble cohérent d'un vingtaine d'équations et qui a ajouté le courant de déplacement à la loi d'Ampère pour obtenir une des plus grandes unifications dans les sciences, celle de la lumière et l'électromagnétisme. Le groupe de plus de vingt équations publiées par Maxwell ont été réduites par l'utilisation de la notation vectorielle aux équations (18) à (20) essentiellement simultanément par Oliver Heaviside, Josiah Willard Gibbs et Heinrich Hertz. Ces équations s'appellent aujourd'hui les équations de Maxwell.

Prédictions des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell prédisent l'existence d'ondes électromagnétiques qui se propagent sans qu'il y ait un milieu de transmission. On peut voir ceci de manière générale dans les équations (19) et (20). En effet, selon la première de ces deux équations, l'existence d'un champ magnétique variable implique l'existence d'un champ électrique. Selon la deuxième, la variation dans le temps du champ électrique produit également un champ magnétique. Cette réaction en chaîne est ce que l'on appelle une onde électromagnétique qui se détache de la source originale.

Elles prédisent aussi que la vitesse de la lumière et de toutes les ondes de nature électromagnétique est constante et égale, dans le vide, à

$$c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s} \quad (21)$$

Ce dernier résultat n'est pas intuitif et il est à la base de la théorie de la relativité, qui a révolutionné la physique au début du 20ème siècle et qui a permis le développement, par exemple, du système GPS.

Il s'avère que la vitesse  $c$  n'est pas seulement celle de la lumière, mais qu'elle représente la limite fondamentale de vitesse dans l'univers, aussi bien pour les

ondes gravitationnelles que pour la matière en mouvement et pour la transmission de l'information.

Les équations de Maxwell prédisent également la façon dont les ondes électromagnétiques (y compris la lumière) se réfléchissent lorsqu'elles impactent sur une surface.



## Exercices

1. Calculez le produit vectoriel de  $\vec{A} = 0.5\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + \vec{a}_z$  et  $\vec{B} = -\vec{a}_x + 4\vec{a}_y - 2\vec{a}_z$

2. Calculez le produit vectoriel de  $\vec{A} = (1,2,1)$  et  $\vec{B} = (-2,3,0)$

3. Une charge  $Q$  se trouve au repos à l'origine d'un système Cartésien de coordonnées immergée dans un champ magnétique dont la densité de flux est  $\vec{B} = 3\vec{a}_x \text{ Tesla}$ . Si la densité de flux est augmentée à  $\vec{B}_{New} = 6\vec{a}_x \text{ Tesla}$  champ magnétique, que se passe-t-il avec la force?

\_\_\_\_\_ Elle est la même qu'avant le changement

\_\_\_\_\_ Elle se réduit à la moitié

\_\_\_\_\_ Elle se multiplie par deux

4. Une charge électrique de  $-4\text{ C}$  se déplace dans la direction  $\vec{a}_x$  à une vitesse de  $20 \frac{m}{s}$  dans un champ magnétique de  $2\text{ Tesla}$ . Si la force sur la charge est de  $80\text{ N}$ , quel est l'angle entre la vitesse et la densité de flux magnétique ?

5. Une charge de  $-3\text{ C}$  se déplace à une vitesse  $\vec{v}$  dans un champ magnétique  $\vec{B} = (4, -3, 1)$ . Si la force magnétique sur la charge est  $\vec{F}_m = (9, -6, -9)$ , calculez la vitesse  $\vec{v}$ .

6. Dessinez un système Cartésien de coordonnées et essayer de trouver vous même le résultat des produit de vecteurs orthonormaux suivants :

$$\vec{a}_y \times \vec{a}_z$$

$$\vec{a}_x \times \vec{a}_x$$

$$\vec{a}_z \times \vec{a}_x$$

$$\vec{a}_z \times \vec{a}_y$$

7. Quelles sont les unités de

La vitesse  $\vec{v}$  :

La densité de flux magnétique  $\vec{B}$  :

Le champ magnétique  $\vec{H}$  :

La force :

8. Quelle est la relation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  ?



9. Quel est le nom, quelle est la valeur et quelles sont les unités de  $\mu_0$  ?

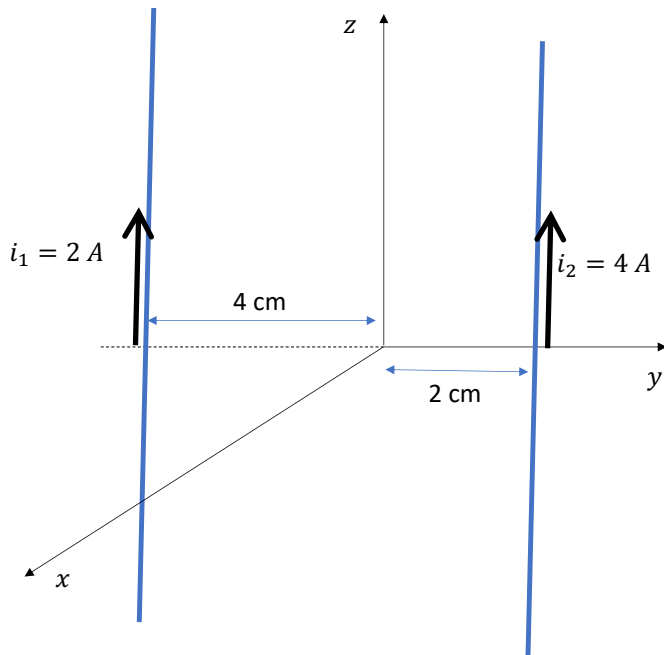
10. Quelle est la manière usuelle de représenter dans une figure un champ magnétique qui sort du papier ?

11. Quelle est la manière usuelle de représenter dans une figure un champ magnétique qui rentre dans le papier ?

12. Quel est le rayon du cercle décrit par un charge de  $Q = 2 \mu C$  et de masse  $1.1 \times 10^{-6} kg$  si elle se déplace à une vitesse de  $10^8 \frac{m}{s}$  dans un champ magnétique de 1 *Tesla* ?

13. La force magnétique sur  $2.5 \text{ m}$  de câble droit qui coïncide avec l'axe  $z$  d'un système Cartésien de coordonnées est  $\vec{F}_m = -4\vec{a}_x$ . Si le câble est parcouru par un courant de  $10 \text{ A}$  dans la direction positive de l'axe  $z$ , calculez la densité de flux magnétique dans laquelle le câble est immergé.

14. Calculez le champ magnétique (norme et direction) à l'origine du système Cartésien de coordonnées de la figure.



Ω

15. Dans l'exercice précédent, est-ce que les câbles s'attirent ou est-ce qu'ils se repoussent ? Expliquez.