

# Contrôle d'erreurs

## Partie 2

# Objectifs

---

- Savoir calculer le rendement d'un code détecteur/correcteur
- Code de Hamming:
  - Savoir calculer un mot de code avec une matrice génératrice du code H
  - Savoir calculer le syndrome d'un mot de code avec une matrice de contrôle de parité G
  - Pouvoir expliquer et appliquer le principe de code de répétition

# Code de Hamming: Matrice génératrice du code $H$

---

- Dimensions:  $m \times n$
- Rappel:
  - $m$  : nombre de bits de données
  - $r$  : nombre de bits de contrôle
  - $n$  : nombre de bits des mots de code ( $m + r$ )
- Composée d'une matrice identité  $I_m$  et d'une matrice  $P$  de dimension  $m \times r$ :

$$H = [I_m; P]$$

# Rappel: matrice identité

---

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Exemple de matrice $H$

---

$$m = 4; \quad r = 3; \quad n = m + r = 4 + 3 = 7;$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Génération des mots de code

---

$$y^T = x^T H$$

- Exemple:

$$x^T = [0100]$$

$$[0100] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$y^T = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

# Code de Hamming: Matrice de contrôle de parité $G^T$

---

- Dimensions:  $n \times r$
- Composée de la matrice  $P$  et d'une matrice identité  $I_r$

$$G^T = \begin{bmatrix} P \\ I_r \end{bmatrix}$$

- Exemple:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Code de Hamming: Syndrome

---

- Le syndrome permet de détecter une erreur
- Calcul du syndrome  $s$  d'un mot:

$$s^T = y^T G^T$$

- Si le syndrome vaut 0, le mot de code est correct



# Exemple calcul de syndrome

---

$$s^T = y^T G^T$$

$$y^T = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$s^T = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

# Rendement

---

- Définition: rapport entre les bits de données et la longueur totale des paquets

$$R = \frac{m}{n}$$

- Exemple:
  - Mot de données sur 8 bits
  - 4 bits de contrôle sont nécessaires
  - $R = 67\%$

# Code de répétition

---

- Exercice en groupe:
  1. Créer la matrice génératrice  $H$  d'un code de répétition
  2. Créer la matrice de contrôle de parité  $G$  correspondante
  3. Générer plusieurs mots de code
  4. Ajouter une ou plusieurs erreurs dans certains des mots de code
  5. Calculer le syndrome des mots de code et déterminer le nombre maximum d'erreurs qu'il est possible de détecter / corriger